

正 会員 ○奥山 博康 (清水建設)
 学生会員 島中 章 (早稲田大学)

1. はじめに

建物内の空気流動や圧力の分布を計算するために、数値流体解析に対して比較的マクロでありながら、工学的な実用性を重視した換気回路網モデルが国内外多くの研究者[1]によって開発されている。これらのモデルは、各ゾーンでの風量バランスと、各流路での圧力差と風量の実験的關係式を用いる原理では同じだが、モデルの構造や非線形連立方程式の解法などにおいて異なっている。

著者はモデルの構造については統一性と標準化の問題があることを指摘してきた。また解法については特有の振動の問題があることを示し、解決する方法[3]を提案してきた。

国際協力によって開発されている換気計算プログラムCOMIS[2]の中の一つの解法では、ニュートンラプソン法で用いる圧力による風量の偏微分係数を解析微分で得ている。しかし著者のNETSでは数値微分を用いてきた。数値微分はアルゴリズムの単純さがあるとしても、計算時間と計算精度などは解析微分の方が優れていると考えられる。NETSはCOMISとはモデルの構造が異なるので、解析微分に改良した場合のデータ構造とアルゴリズムを述べ、さらにこの改良によるNETSによって数値微分と解析微分の計算時間の違いなどを調べた事例研究についても述べる。

2. モデル化法

本論での換気回路網はゾーン(zone)と流路(flow path)の二つだけの要素から成る。建築換気系だけでなく、機械換気によるダクト系が

含まれても、ダクトの分岐点には十分な容積のゾーンの存在を仮定すれば、動圧を含めた全圧は全て静圧に変換される。従って換気系全体にわたって静圧を持つ節点系としてモデル化できる。流路には*i*側と*j*側の定義を行う。送風機(fan)は任意の流路に取り付けることができる。

大まかな解法のプロセスは圧力仮定法に属し、仮定した圧力を修正していく方法として修正ニュートンラプソン法と呼ぶ方法[3]を用いている。仮定圧力から各ゾーンでの風量バランスを計算しヤコビアンマトリックスを構成するデータ構造を表1に示す。

まず送風機を持たない流路の*k*番について*i*側からの圧力を*p_i*、*j*側からの圧力を*p_j*と表せば次式で計算される。ここに*g*は重力加速度である。

$$p_i = p(\sigma_i(k)) - \{h(k) - l(\sigma_i(k))\} \cdot \rho(\sigma_i(k)) \cdot g + w_i(k) \quad (1)$$

$$p_j = p(\sigma_j(k)) - \{h(k) - l(\sigma_j(k))\} \cdot \rho(\sigma_j(k)) \cdot g + w_j(k) \quad (2)$$

*p_i*と*p_j*の大小関係により風上側の圧力節点番号 $\sigma_u(k)$ と風下側の $\sigma_d(k)$ が決定される。流路の差圧を Δp とすれば次式で計算される。

$$\Delta p = |p_i - p_j| \quad (3)$$

この Δp と圧力損失係数などから *k* 番流路の風量 *q(k)* は次式で計算される。

$$q(k) = a(k) \cdot \left(\frac{2 \cdot \Delta p}{\zeta(k) \cdot \rho(\sigma_u(k))} \right)^{\frac{1}{n(k)}} \quad (4)$$

Recent Improvement in Solver of the Air Flow Network Model

OKUYAMA hiroyasu et al.

送風機を持つ流路についてはP-Q特性曲線が $b_0(k)$ から $b_3(k)$ を係数に持つ3次曲線で表されているからカルダノ等の解式を利用して $q(k)$ について解くことができる。しかし一般に流路について圧力損失指数 $\gamma(k)$ は2ではないので、そのために $q(k)$ の2次式に回帰しておく。

$$\zeta(k) \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{q(k)}{a(k)} \right)^{n(k)} = d_1(k) \cdot \left(\frac{q(k)}{a(k)} \right) + d_2(k) \cdot \left(\frac{q(k)}{a(k)} \right)^2 \quad (5)$$

送風機の加圧が i 側から j 側へ向けに行われる場合と、逆に j 側から行われる場合のそれぞれについて $q(k)$ に関する3次方程式が記述され解くことができる。

$$p_i + b_0(k) + b_1(k) \cdot q(k) + b_2(k) \cdot q(k)^2 + b_3(k) \cdot q(k)^3 - p_j = d_1(k) \cdot \left(\frac{q(k)}{a(k)} \right) + d_2(k) \cdot \left(\frac{q(k)}{a(k)} \right)^2 \quad (6)$$

$$p_j + b_0(k) + b_1(k) \cdot q(k) + b_2(k) \cdot q(k)^2 + b_3(k) \cdot q(k)^3 - p_i = d_1(k) \cdot \left(\frac{q(k)}{a(k)} \right) + d_2(k) \cdot \left(\frac{q(k)}{a(k)} \right)^2 \quad (7)$$

風量 $q(k)$ の根は複素数の範囲で3個あるが少なくとも1個は実数である。正の最大根を求める風量とする。この送風機付きの流路でも同様にして風上側の節点番号 $\sigma_u(k)$ と風下側の節点番号 $\sigma_d(k)$ が求められる。

ここで各々のゾーンでの解法途上の風量残差 $v(i)$ は次の簡単なアルゴリズムで計算できる。ここに $:=$ は代入を意味する。

ALGORITHM (8) Flow Balance

- | Step | Description |
|------|---|
| 1 | For $k := 1, 2, \dots, m$, do Steps 2-3 |
| 2 | Set $v(\sigma d(k)) := v(\sigma d(k)) + q(k)$ |
| 3 | Set $v(\sigma u(k)) := v(\sigma u(k)) - q(k)$ |

Comment: Residual flow in each zone is stored in vector $v(i)$

以上のように節点番号を流路番号から間接的に得るためのベクトル σ を利用し、アルゴリズムを単純にしていることを、節点番号の間接アドレッシング法と呼ぶことにする。

表1 風量収支計算のデータ構造

大分類	内容	配列	size
モデルのサイズ	外気以外の総ゾーン数	n	-
	総流路数	m	-
ゾーンの情報	ゾーン底面の高さ	$l(i)$	$n+1$
	空気の密度	$\rho(i)$	
	ゾーン底面の静圧	$p(i)$	
	風量残差	$v(i)$	
ベクトル 流路の情報	流路の高さ	$h(k)$	m
	流路面積	$a(k)$	
	圧力損失係数	$\zeta(k)$	
	圧力損失指数	$\gamma(k)$	
	風量	$q(k)$	
	i 側の風圧	$w_i(k)$	
	j 側の風圧	$w_j(k)$	
	風量/圧力の偏微分係数	$d_{ip}(k)$	
	圧力損失の風量の2次式への回帰係数	$d1(k)$	
		$d2(k)$	
	送風機P-Q特性の3次曲線への回帰係数	$b0(k)$	
		$b1(k)$	
		$b2(k)$	
$b3(k)$			
流路とゾーンの接続	流路の i 側のゾーン番号	$\sigma_i(k)$	
	流路の j 側のゾーン番号	$\sigma_j(k)$	
流れの向き の情報	風上側ゾーン番号	$\sigma_u(k)$	
	風下側ゾーン番号	$\sigma_d(k)$	

3. 非線形連立方程式の解法

仮定した圧力 $p(i)$ に適当な修正量 Δp_i を加えて風量残差を0にする。全てのゾーンの圧力は連成しているから、適当な修正量を求める方程式も強く連成したものをとる。いま $v(i)$ は v_i と、 $p(i)$ は p_i と表示することにし、 p_{i+1} から $p_n + \Delta p_n$ でのテーラー展開の第一項までを記述すれば次のようになる。

$$v_i(p_1 + \Delta p_1, p_2 + \Delta p_2, \dots, p_n + \Delta p_n) \approx v_i(p_1, p_2, \dots, p_n) + \frac{\partial v_i}{\partial p_1} \cdot \Delta p_1 + \frac{\partial v_i}{\partial p_2} \cdot \Delta p_2 + \dots + \frac{\partial v_i}{\partial p_n} \cdot \Delta p_n \quad (9)$$

この左辺が、圧力の修正をしたことにより1次0になるとする。この式を $i=1$ から $i=n$ まで記述し、修正量のベクトル $p_c = (\Delta p_1, \Delta p_2, \dots, \Delta p_n)$ と風量の残差ベクトル $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ について整理すれば次式の様になる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial v_1}{\partial p_i} & \dots & \frac{\partial v_1}{\partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v_i}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial v_i}{\partial p_i} & \dots & \frac{\partial v_i}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v_n}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial v_n}{\partial p_i} & \dots & \frac{\partial v_n}{\partial p_n} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{p}_c = -\mathbf{v} \quad (10)$$

この左辺の行列に $\partial v_i / \partial p_j$ の偏導関数を含むマトリックスをヤコビアンマトリックスと呼ぶが J とおけば前式は次の様に表示される。

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{p}_c = -\mathbf{v} \quad (11)$$

実際に施す修正量 \mathbf{p}_c^* はこの式から求められた \mathbf{p}_c を半分にするを修正ニュートンラプソン法^[3]と呼んでいる。

$$\mathbf{p}_c^* = -\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{v} \quad (12)$$

(a) ヤコビアンの作り方

このマトリックスの (i, j) 要素はゾーン j の圧力増分に対応するゾーン i の風量残差の変化率である。この風量残差変化率は流出入する個々の風量の変化率の総和である。対角要素は自分自身の圧力が増加した場合であり、必ず流出が増える方向になるから個々の風量変化率も残差変化率も減少方向であり常に負である。一方、非対角要素は他のゾーンの圧力増加により、自分自身の残差は増加する変化をするから必ず風量変化率も残差変化率も正である。この符号の性質を利用し、偏導関数は絶対値を求めておいて、総和計算を行った後で符号を付ければよい。

風量の圧力による偏導関数は(1)から(3)式を見れば分かるように $p(\sigma(k))$ によって微分しても Δp によって微分しても絶対値を求める限り同じである。微分する式は(4)式ではなく Δp について解いた式で風量により微分した後に逆数をとった方が簡単である。

$$\frac{\partial q}{\partial p} = \frac{2 \cdot a^n}{\eta \cdot \zeta \cdot \rho} \cdot \left(\frac{1}{q^{n-1}}\right) \quad (13)$$

送風機が付いている流路の式は(6)と(7)であるが、 $\Delta p = |p_i - p_j|$ で整理し直すと次式となる。

$$\Delta p = d_1 \cdot \left(\frac{q}{a}\right) + d_2 \cdot \left(\frac{q}{a}\right)^2 - b_0 - b_1 \cdot q - b_2 \cdot q^2 - b_3 \cdot q^3 \quad (14)$$

この式から偏微分係数は次式で得られる。

$$\frac{\partial q}{\partial p} = \left| \frac{1}{-3 \cdot b_3 \cdot q^2 + 2 \cdot \left(\frac{d_2}{a^2} - b_2\right) \cdot q + \left(\frac{d_1}{a} - b_1\right)} \right| \quad (15)$$

流路毎の偏微分係数の絶対値を $dqp(k)$ に入れておく。ヤコビアンを配列 RJ に行優先で作成するアルゴリズムは次のようになる。

ALGORITHM (16) Jacobian Matrix

Step	Description
1	For $k=1, 2, \dots, m$, do Steps 2-8
2	If $\sigma_i(k) > n$, go to Step 4
3	Set $RJ(\sigma_i(k) + n * (\sigma_i(k) - 1))$:= $RJ(\sigma_i(k) + n * (\sigma_i(k) - 1)) - dqp(k)$
4	If $\sigma_j(k) > n$, go to Step 6
5	Set $RJ(\sigma_j(k) + n * (\sigma_j(k) - 1))$:= $RJ(\sigma_j(k) + n * (\sigma_j(k) - 1)) - dqp(k)$
6	If $\sigma_i(k) > n$ or $\sigma_j(k) > n$, go to Step 1
7	Set $RJ(\sigma_i(k) + n * (\sigma_j(k) - 1))$:= $RJ(\sigma_i(k) + n * (\sigma_j(k) - 1)) + dqp(k)$
8	Set $RJ(\sigma_j(k) + n * (\sigma_i(k) - 1))$:= $RJ(\sigma_j(k) + n * (\sigma_i(k) - 1)) + dqp(k)$

Comment: Vector $dqp(k)$ stores partial derivative q/p of each flow path. Jacobian matrix RJ stores elements in columnwise.

(b) その他の解法上の問題

既報^[3]で述べたように、前述した修正ニュートン・ラプソン法に加えて、初期値の取り方や倍精度の計算が必要である。さらに本論での解析微分による場合は、収束計算の開始時点で流路の両側の差圧が0になり(13)式での計算が不可能になる場合が起こる。この場合は例えば10-12程度の十分に小さな Δp による風量 q を計算して用いれば良い。

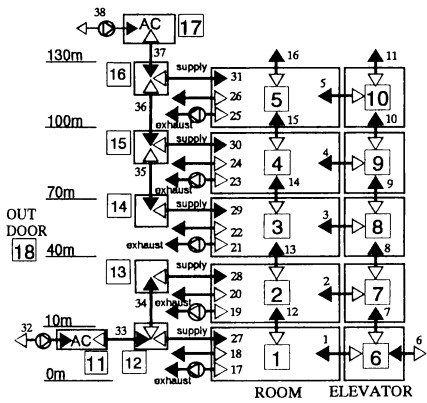


図1 小規模モデル

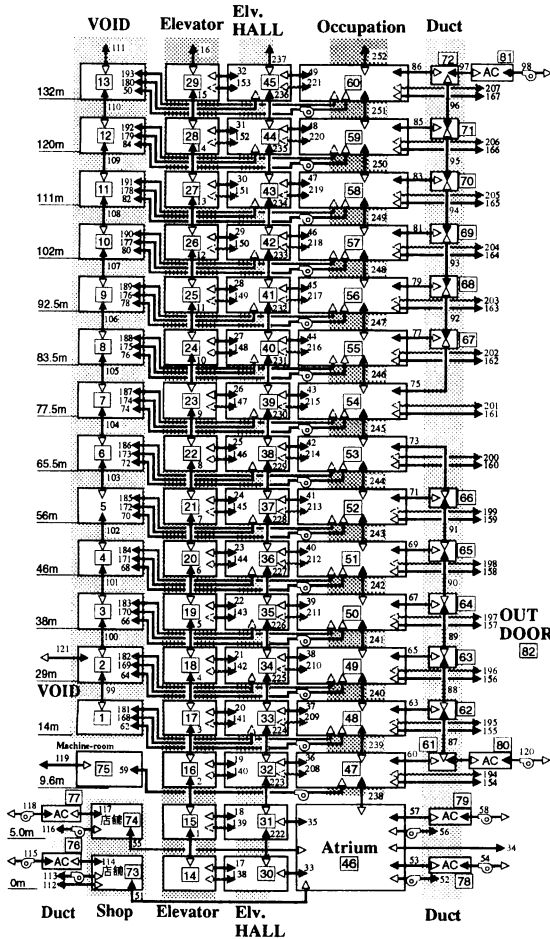


図2 大規模モデル

4. 事例研究

今回数値微分から解析微分に改良した効果を事例研究によって調べた。小さなモデルは事務所建物を想定したものでゾーン数 n は17であり、大きなモデルは宿泊施設でゾーン数は81である。どちらもエレベータシャフト内の空気温度は未知数扱いで、前者は5節点で後者は29節点の熱回路網と連成して解いている。計算時間の結果を表2に示す。許容誤差とは風量の残差を総通過風量で除した比率に対するものである。修正ニュートンラプソン法内の反復回数は調べなかったが、伝熱と換気の連成収束計算は約7回程度であった。解析微分により計算時間が著しく減少している。

表2 計算時間(IBM-9021:秒)の比較

モデル	小規模モデル	大規模モデル	
許容誤差	10 ⁻²	10 ⁻⁵	10 ⁻² 10 ⁻⁵
解析微分	0.37	0.43	3.61 6.33
数値微分	1.14	1.91	18.24 36.01

5. まとめ

換気回路網の修正ニュートンラプソン法におけるヤコビアン の 偏微分係数を、数値微分から解析微分に改良した内容と、計算時間などについて検討した結果を述べた。

<謝辞>事例研究に用いた計算モデル作成には清水建設設計本部の長岡氏と大瀧氏のご協力を頂きました。

【参考文献】

- [1] Helmut E. Feustel, Juergen Dieris, A Survey of Air Flow Models for Multizone Structures, Indoor Environment Program Applied Science Division, Lawrence Berkeley Laboratory, Berkeley, CA 94720, USA, March 1991, LBL-30288, UC-350
- [2] Helmut E Feustel, Alison Raynor-Hoosen, et al, Technical Note AIVC29, Fundamentals of the Multizone Air Flow Model-COMIS, Air Infiltration and Ventilation Centre, University of Warwick Science Park, Barclays Venture Centre, Sir William Lyons Road, Coventry CV4 7EZ, Great Britain, May 1990
- [3] 奥山博康, 換気回路網のモデル化法とその非線形連立方程式の解法, 空気調和・衛生工学会学術講演会・講演論文集, 89年10月, 729-732
- [4] 奥山博康, 換気回路網によるシミュレーションの理論と応用, 空気調和・衛生工学会学術講演会・講演論文集, 83年10月, 545-548
- [5] 木村建一編, 建築環境学1, 丸善株式会社, '92年4月発行, ISBN 4-621-03706-4 C3052