

1. はじめに 熱回路網に関する基本的理論に関しては既に報じている^{②⑤}。すなわち、系の数学的構造と特性，さらに解析的時間積分法(シミュレーション)などである。本論文においては、これを応用する場合の、いくつかの具体的問題点の処理の仕方に重点をおいて論ずる。

2. 定式化 回路網の概念とは、ある部分は他の全ての部分とつながっていると考えることである。この概念にもとづいて定式化するので、物理的空間次元の1次元から3次元問題も、さらに工学的に必要となってくる一般N次元問題も全て同一の数式で記述できる。それゆえこの定式化を完全システム記述と呼ぶ。完全な汎用性を実現できる理由はここにある。またこの概念は例えていうなら系の骨組みに関するものであって、その骨組みに貼る板をつくる概念ではない。板をつくる概念とは有限要素法である。建築環境工学においては、このような数学的手順を経ずに、直接、熱貫流率という工学的特性値とその計算法によって、その板をつくれる場合が多いのである。さて、実現系の系を、熱容量を持つ n 箇の節点と、節点間の一般化熱コンダクタンスによる近似モデルにする。ここに一般化とは伝導、伝達のみならず移流も含むことを意味する。するとある j 節点において次の熱平衡式がなりたつ。

$$m_{jj} \cdot \dot{x}_j = \sum_{i=1}^{n+n_0} c_{ij} \cdot x_i - \sum_{i=1}^{n+n_0} c_{ji} \cdot x_j + \sum_{i=1}^{n_g} r_{ij} \cdot g_i \dots\dots\dots (1)$$

ここに m_{jj} は j 節点の熱容量または体積， x_i, x_j はそれぞれ i, j 節点の温度， c_{ij} は i から j 節点へ向う一般化熱コンダクタンス， g_i は i 番の自由入力発生源， r_{ij} はそれから j 節点への入力率， n_0 は外部の固定境界節点数， n_g は自由入力発生源数である。また $\dot{}$ は時間微分を表わす。多くの論文においては境界条件の定式化が不完全である^①A⁻¹系全体の状態方程式を明快に組み立てるためには(1)式の記述法が最も合理的であると考えられる。

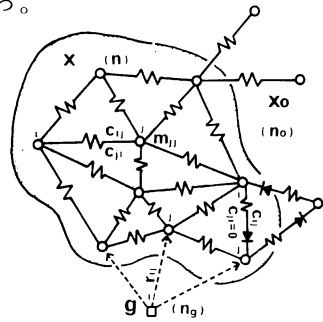


図1 概念図

いま $x = {}^t(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$ を状態ベクトル， $x_0 = {}^t(x_{n+1}, \dots, x_{n+n_0})$ を固定入力ベクトル， $g = {}^t(g_1, \dots, g_{n_g})$ を自由入力ベクトルと定義すれば，(1)式から状態方程式は直ちに(2)式のように構成される。(2)式右辺第2，3項をまとめて(3)式のように f とおき熱流入力ベクトルと呼ぶ。

$$M \cdot \dot{x} = C \cdot x + C_0 \cdot x_0 + R \cdot g \dots\dots\dots (2)$$

$$f = C_0 \cdot x_0 + R \cdot g \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{ただし、} \begin{matrix} \left[\begin{array}{ccc} m_{11} & & \\ & \dots & 0 \\ & & m_{jj} \\ & & & \dots \\ & & & & m_{nn} \end{array} \right] \\ \\ \left[\begin{array}{ccc} -\sum_{i=1}^{n+n_0} c_{i1}, \dots, c_{j1}, \dots, c_{n1} \\ & \dots & \\ c_{1j}, \dots, -\sum_{i=1}^{n+n_0} c_{ji}, \dots, c_{nj} \\ & \dots & \\ c_{1n}, \dots, c_{jn}, \dots, -\sum_{i=1}^{n+n_0} c_{ni} \end{array} \right] \\ \\ \left[\begin{array}{c} c_{n+1,1}, \dots, c_{n+n_0,1} \\ \vdots \\ c_{n+1,j}, \dots, c_{n+n_0,j} \\ \vdots \\ c_{n+1,n}, \dots, c_{n+n_0,n} \end{array} \right] \\ \\ \left[\begin{array}{c} r_{1j}, \dots, r_{ngj} \\ \vdots \\ r_{1n}, \dots, r_{ngn} \end{array} \right] \end{matrix}$$

である。

3. 時間積分(シミュレーション) 数学モデルの状態方程式は(2)式として得られた。これは時間積分することによってシミュレーションが行なわれる。この形式解は推移行列 ϕ を用いて重量積分で表わされる。この形式解では内部の時間関数が陰になっているので実際の積分

空気調和・衛生工学会学術論文集('83. 10. 11 ~ 13 札幌)

を行なうことができない。そこでこれを射影分解によって各固有空間上の陽な積分になおす。^②

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n P_i \cdot e^{\alpha_i(t-t_0)} \cdot \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n P_i \cdot e^{\alpha_i(t-\tau)} \cdot \mathbf{f}(\tau) d\tau \dots\dots\dots (4)$$

ここに α_i は $C = M^{-1} \cdot C$ の固有値, P_i は対応する射影子, \mathbf{f}^* は $\mathbf{f} = M^{-1} \cdot \mathbf{f}$ なる温度入力ベクトルである。 $\mathbf{f}^*(t)$ が数式記述できないような不規則入力であれば, まず時間的離散データになおし, それらの Δt 間隔の 2 点間を線型補間するか階段関数補間するかによって有用な時間積分公式をつくっておくことができる。 k を時刻番号とし, 前者については次式となる。^③

$$\mathbf{x}(k \Delta t) = \phi(\Delta t) \cdot \mathbf{x}((k-1) \Delta t) + U_0 \cdot \mathbf{f}^*((k-1) \Delta t) + U_1 \cdot \mathbf{f}^*(k \Delta t) \dots\dots\dots (5)$$

ここに $\phi(\Delta t) = \sum_{i=1}^n P_i \cdot e^{\alpha_i \Delta t}$, $U_0 = \sum_{i=1}^n P_i \cdot a_{i0}$, $U_1 = \sum_{i=1}^n P_i \cdot a_{i1}$ ただし, $a_{i0} = -(1/\Delta t) \cdot (1/\alpha_i)^2 \cdot e^{\alpha_i \Delta t} + (1/\Delta t) \cdot (1/\alpha_i)^2 + (1/\alpha_i) \cdot e^{\alpha_i \Delta t}$, $a_{i1} = (1/\Delta t) \cdot (1/\alpha_i)^2 \cdot e^{\alpha_i \Delta t} - (1/\Delta t) \cdot (1/\alpha_i)^2 - (1/\alpha_i)$ である。また後者の入力に対しては次のようになる。^③

$$\mathbf{x}(k \Delta t) = \phi(\Delta t) \cdot \mathbf{x}((k-1) \Delta t) + U_s \cdot \mathbf{f}^*(k \Delta t) \dots\dots\dots (6)$$

ここに $U_s = \sum_{i=1}^n P_i \cdot (1/\alpha_i) \cdot (e^{\alpha_i \Delta t} - 1)$ である。さらに実用上は近似積分も有用である。1 つは無条件に推移安定であり, m_{jj} がいくつ 0 になっても解が求まるクランク・ニコルソン・スキームは次式で表わされる。^{② p134}

$$\mathbf{x}(k \Delta t) = \phi_c(\Delta t) \cdot \mathbf{x}((k-1) \Delta t) + U_c \cdot \mathbf{f}(k \Delta t) \dots\dots\dots (7)$$

ここに $\phi_c(\Delta t) = (M/\Delta t - C)^{-1} \cdot (M/\Delta t)$, $U_c = (M/\Delta t - C)^{-1}$ である。また大次元のマトリクス演算が困難な場合に用いるエクスプリシット・スキームは次式で表わされる。

$$\mathbf{x}(k \Delta t) = \phi_e(\Delta t) \cdot \mathbf{x}((k-1) \Delta t) + U_e \cdot \mathbf{f}(k \Delta t) \dots\dots\dots (8)$$

ここに $\phi_e(\Delta t) = E + \Delta t \cdot M^{-1} \cdot C$, $U_e = \Delta t \cdot M^{-1}$ である。これを単に計算するだけならシステムという全体的概念を必要としないが, 推移安定性の考察のためには,^{② p134} それが必要になってくる。

4. システムパラメーター 容量 m_{jj} , 一般化コンダクタンス c_{ij} , 入力率 r_{ij} をまとめてシステムパラメーターと呼ぶ。これらをマイクロに, かつ数学的に求めるにはガレルキン法が有効である。ここではマクロに, かつ工学的に求める方法について述べる。計算対象領域を, 熱流のバランスをみる検査体積 (以下 C.V.) に分割し, それらの中心に節点をもうける。節点間の伝熱は定常過程とみなす。従ってその一般化コンダクタンス c_{ij} は通常の熱貫流率とその計算法から計算される。また j 番 C.V. の容量 m_{jj} はその熱容量または体積である。次にいくつかの具体例を示す。図 2 は壁の伝熱系とその近似モデルの回路網である。3 番節点は空気層の温度を表わす。2, 4 番節点はそれををさむ両側表面温度を表わし, これらは $m_{22} = m_{44} = 0$ である。2, 4 番節点間には空気層を通りこしての輻射熱

伝達がある。これはステファン・ボルツマンの 4 乗法則と形態係数によって非線型的に記述されるが, それを線型近似し, 輻射熱コンダクタンスを定義する。^④ 図 3 は異形壁断面とその近似モデルの回路網である。このように 2 次元的な系

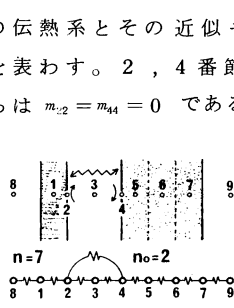


図 2 輻射

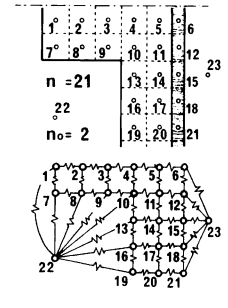


図 3 多次元

になっても通常の熱貫流計算にもとづいて、節点間の熱コンダクタンスを計算することができる。また例え3次元的な系になっても同様である。以上の具体例における一般化コンダクタンス c_{ij} は対称性 $c_{ij} = c_{ji}$ なる重要な性質を持つ。すなわち伝導や伝達と呼ばれる伝熱の一般化コンダクタンスは対称性を持つといえる。これに対し、次に示す具体例においては、温度が流体の流れによって運ばれ、すなわち移流によって伝熱が行なわれる。図4は多槽直列の蓄熱槽とその近似モデルの回路網である。ダイオードを持つ枝は、この移流による一方通行の一般化コンダクタンスを表わす。この移流の一般化コンダクタンスは i から j 節点への流量を q (kcal/°C·hr) とするとき $c_{ij} = q$, $c_{ji} = 0$ なる非対称性を持つ。次に入力率 r_{ij} を日射量に関連して説明する。図5は5方位に分解された日射量の座標成分, g_1 (南), g_2 (北), g_3 (東), g_4 (西), g_5 (垂直) と, 受熱する面の法線ベクトル n の方位角 α , 傾斜角 β を示す。面積 w の受熱表面が j 番節点とする。また各日射成分に対する吸収率を a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 とする。すると入力率は次のように

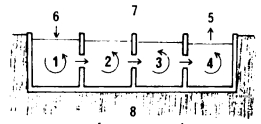


図4 移流

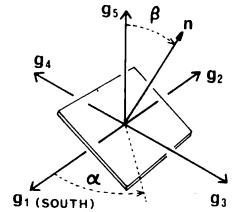


図5 日射量

計算される。 $\sin\beta\cos\alpha$ が非負ならば $r_{1j} = a_1 \cdot w \cdot \sin\beta\cos\alpha$ かつ $r_{2j} = 0$, 負ならば $r_{1j} = 0$ かつ $r_{2j} = a_2 \cdot w \cdot \sin\beta\cos\alpha$ 。 $\sin\beta\sin\alpha$ が非負ならば $r_{3j} = a_3 \cdot w \cdot \sin\beta\sin\alpha$ かつ $r_{4j} = 0$, 負ならば $r_{3j} = 0$ かつ $r_{4j} = a_4 \cdot w \cdot \sin\beta\sin\alpha$ 。 $\cos\beta$ が非負ならば $r_{5j} = a_5 \cdot w \cdot \cos\beta$, 負ならば $r_{5j} = 0$ である。このようにして、例えば建物の向きが定まれば、日射量に対する r_{ij} は定数となる。

5. 回路網のモード変化

回路網の総節点数 $n+n_0$ と容量 m_{ij} が変化せず、一般化コンダクタンス c_{ij} あるいは n, n_0 が変化することを回路網のモード変化として定義する。この物理的な意味は、系の中で部材の消滅、生成などはないものとし、ただその熱的なつながり方とつながりの程度が変化すること、あるいは室温の節点について、それが自然室温になっている時の n に対して、冷暖房によって設定を受ければ n が減り、 n_0 が増えることなどである。従って狭義の非線型問題なども、このとらえ方で扱えることになる。さて全シミュレーション期間において合計 m_d 個の回路網モードが出現するとする。それらに回路網モード番号 $m = 1, 2, \dots, m_d$ をつける。それぞれのモード

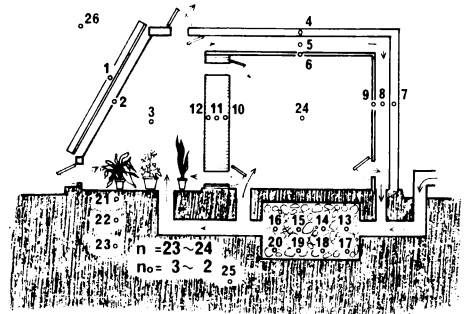


図6 パッシブソーラーハウス

において3で述べた方法により、推移行列 ϕ と駆動行列 U を、あらかじめ計算しておく。こうして各時間積分区間でのモードに応じた推移行列と駆動行列を用いて、時間積分を行なっていくことにより、回路網のモード変化に対応することができる。次に図6のようなパンプ・ソー

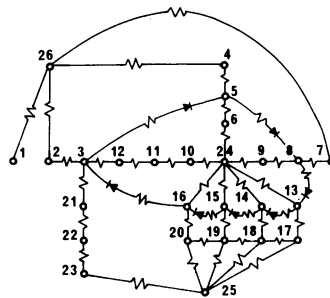


図7 蓄熱モード

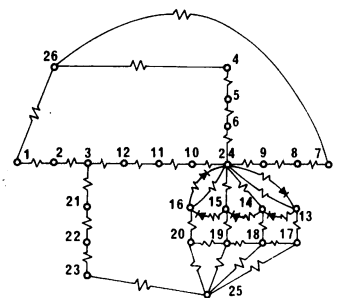


図8 暖房モード

ラーハウスを例にとって説明する。これは付設温室，碎石蓄熱槽，二重壁と蓄放熱壁を持つ。節点番号について，1は日射遮蔽断熱パネル，2はガラス窓，10~12は蓄放熱壁，17~20は碎石蓄熱槽，21~23は地中温度を表わす。4~6と7~9は二重壁であるが，そのうち5と8は空気層を表わす。13~16は碎石蓄熱槽の中の空気を表わす。25は不易層，26は外気であり，固定入力となるが，24の室温は冷暖房の機械装置によって設定をうけるか，うけないかによって固定入力になったり，状態変数になったりする。この例においては空気の流し方と日射遮断熱パネルの開閉によって種々の回路網モードを作ることができる。例えば図7は，あたたまった温室の空気を蓄熱槽に循環させ，蓄熱しているモードを表わす。図8は，それを放熱し，室内を暖房しているモードを表わす。また，時間積分によって1次的に得られるのは x であるが，そのほかに必要な各種の工学的指標である熱負荷，環境温度などは，それらの要素を持つベクトル y と適当な出力マトリクス D を定義することにより $y = D \cdot {}^t(x, {}^t x_0, {}^t g)$ で計算する。

6. システムの濃縮 システムの次数 n が非常に大きい場合は，近似的に濃縮して，次数を下げるができる。この方法は計算経済性の向上に役立つ。状態ベクトル x を定常的な意味での主の x_1 と従の x_2 に分ける。従ってコンダクタンス・マトリクスの内部もそれに応じて分割すれば(9)式が成立し，($v \neq 0$)この x_2 に関する行により x_2 は(10)式のように表わされる。

$$\begin{bmatrix} {}_{11}C & {}_{12}C \\ {}_{21}C & {}_{22}C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (9) \quad x_2 = -{}_{22}C^{-1} {}_{21}C \cdot x_1 = L \cdot x_1 \dots\dots\dots (10)$$

(10)式から x の近似 \tilde{x} は次式のように表わされる。

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} E_1 \\ L \end{bmatrix} \cdot x_1 = S \cdot x_1 \dots\dots\dots (11)$$

ここに E_1 は x_1 のサイズの単位マトリクスである。近似状態方程式の重みつき残差積分を $[0, T]$ 時間区間で行なったものを0とおく。ただし重み関数は \tilde{x} にとる。

$$\int_0^T \tilde{x} \cdot (M \cdot \dot{\tilde{x}} - C \cdot \tilde{x} - f) dt = \int_0^T x_1 \cdot ({}^t S \cdot M \cdot S \cdot \dot{x}_1 - {}^t S \cdot C \cdot S \cdot x_1 - {}^t S \cdot f) dt = 0 \dots\dots\dots (12)$$

これを恒等的に成立させるのは次式が成立する場合である。

$${}^t S \cdot M \cdot S \cdot x_1 = {}^t S \cdot C \cdot S \cdot x_1 + {}^t S \cdot f \dots\dots\dots (13)$$

これが濃縮された近似システムの状態方程式となる。また，このように濃縮はせずに，システムをいくつかのサブシステムに分割することにより次数を下げる方法については，線型サブシステムの接続(連成)理論として既報に述べた。^⑥

7. まとめ 他の論文における熱回路網の概念は，全体的なシステム理論的定式化法において欠落していること，またその数式記述も不完全であることを指摘した。特に境界条件の扱いが不備であり，そのため全体システムの状態方程式が正しく組み上げられない。本論文においては既に報じた基本的理論を要約したのち，具体的に应用する際のいくつかの問題点の処理の仕方を述べた。すなわち，種々の伝熱系におけるシステムパラメーターの意味と計算法，回路網のモードの変化の定義と意味，システムの次数の濃縮法などである。

[参考文献] ① "Modeling of Solar Heating and Air Conditioning" 31 Jan '73, Sol. Ene. Lab. Univ. of Wisconsin Madison, Grant NSF/RANN/SE/G1 34029/HR/72/4 ② 奥山, 木村「建築物の熱回路系における推移行列と射影分解による時間数値積分公式」日本建築学会論文報告集, 第269号昭和53年7月 ③ 奥山「熱湿気回路網によるシミュレーションの理論」空調調和・衛生工学会学術論文集, 昭和57年10月 ④ 木村建一「建築設備基礎理論演習」学献社 ⑤ 木村, 奥山「熱回路網数値解析法による自然空調に関する研究」日本建築学会大会学術講演梗概集, 昭和51年 ⑥ 奥山「空調システムシミュレーションの理論とアルゴリズム」空調調和・衛生工学会・学術論文集, 昭和57年10月 ⑦ 奥山「一般拡散システムの回路網による状態方程式とそのシステムパラメーターの同定理論」建築学会梗概集, 昭和58年(⑧は逆探問題の一般解である)