

熱回路網の状態方程式モデルによる最適制御理論

正会員 ○ 奥山 博康*

その1:最適レギュレータ制御の基本的理論と数値実験

熱回路網 状態空間法 最適レギュレータ制御

1 はじめに

建物の冷暖房の分野でも、状態空間法による現代制御理論の応用が効果をあげることが期待される。この場合に本熱回路網モデル^[1]が状態方程式の一般的構成法として、また射影分解による解析的時間積分法^[1]は安定で精度のよい離散時間システムを得る方法として、有効であると思われる。本論文では比較的一般的な適用性を持つ最適レギュレータ制御について、基本的理論とその数値実験による確認について述べる。

2 最適レギュレータ制御の解法

建築物伝熱系の熱回路網による状態方程式モデルは次式で表された。

$$M \cdot \dot{x} = C \cdot x + C_0 \cdot x_0 + R \cdot g = C \cdot x + f \quad (1)$$

ここに記号は論文^[1]と同じである。熱流入力ベクトル f により、 $u = M^{-1} \cdot f$ を温度入力ベクトルとする。 $M^{-1} \cdot C$ の固有値を α_i 、射影子を P_i とする。(1) 式を解析的な離散時間システムにするため射影分解を用いる。推移マトリクス Φ は $\sum_{i=1}^n P_i \cdot e^{\alpha_i \Delta t}$ 、駆動マトリクス D は $\sum_{i=1}^n P_i \cdot (1/\alpha_i) \cdot (e^{\alpha_i \Delta t} - 1)$ で計算される。ただし n はシステムのサイズである。

$$x_{k+1} = \Phi \cdot x_k + D \cdot u_k \quad (2)$$

ここに添字 k はタイムステップを表す。有限時間の最適レギュレータ問題は状態ベクトル x_k 、入力ベクトル u_k 、さらに最終状態 x_m の二次形式の和を最小化することと表示される。このとき (2) 式は拘束条件であるから、 n 次のベクトル p_{k+1} を乗数としてラグランジュ乗数法を適用する。この節に述べる解法は基本的に文献^{[2]p.282}と同じであるが、次の基本的な評価関数の定式化が少し異なっている。

$$J(x_k, u_k, p_{k+1}) = \frac{1}{2} x_m \cdot F \cdot x_m + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2} \{ x_k \cdot Q \cdot x_k + u \cdot R \cdot u_k \} + \sum_{k=0}^{m-1} p_{k+1} \cdot \{ \Phi \cdot x_k + D \cdot u_k - x_{k+1} \} \quad (3)$$

ここに F 、 Q は非負の、 R は正の対称マトリクスで、

m は最終の時刻を表す。また x_0 は初期状態で与えられる。 $\partial J / \partial u_k = 0, (k = 0, 1, \dots, m-1)$ から次式が得られる。ただし u_k^* は最適入力を表す。

$$u_k^* = -R^{-1} \cdot {}^t D \cdot p_{k+1} \quad (4)$$

また $\partial J / \partial x_k = 0, (k = 1, 2, \dots, m)$ から次式が得られる。

$$p_k = {}^t \Phi \cdot p_{k+1} + Q \cdot x_k^* \quad (k = 1, 2, \dots, m-1) \quad (5)$$

$$p_m = F \cdot x_m^* \quad (k = m) \quad (6)$$

ここに x_k^* は状態の最適軌道を表す。 $\partial J / \partial p_{k+1} = 0, (k = 0, 1, \dots, m-1)$ によって次式も成立する。

$$x_{k+1}^* = \Phi \cdot x_k^* + D \cdot u_k^* \quad (7)$$

u_k^* は x_k^* によってフィードバックされるから (4) 式をみて次のようなマトリクス $G_k, (k = 1, 2, \dots, m)$ を仮定できる。

$$p_k = G_k \cdot x_{k-1}^* \quad (8)$$

これを (4) 式に代入すれば、

$$u_k^* = -R^{-1} \cdot {}^t D \cdot G_{k+1} \cdot x_k^* \quad (9)$$

となり、さらに (9) 式を (7) 式へ代入すれば次式が得られる。

$$x_{k+1}^* = (\Phi - D \cdot R^{-1} \cdot {}^t D \cdot G_{k+1}) \cdot x_k^* \quad (10)$$

一方、(5) 式に (8) 式を代入する。

$$G_k \cdot x_{k-1}^* = {}^t \Phi \cdot G_{k+1} \cdot x_k^* + Q \cdot x_k^* = ({}^t \Phi \cdot G_{k+1} + Q) \cdot x_k^*$$

(10) 式をこの右辺へ代入する。

$$G_k \cdot x_{k-1}^* = ({}^t \Phi \cdot G_{k+1} + Q) \cdot (\Phi - D \cdot R^{-1} \cdot {}^t D \cdot G_k) \cdot x_{k-1}^*$$

この式は x にかかわらず成立しなければならないから次式が成立する。

$$G_k = ({}^t \Phi \cdot G_{k+1} + Q) \cdot (\Phi - D \cdot R^{-1} \cdot {}^t D \cdot G_k) \quad (11)$$

これを G_{k+1} から G_k を計算する後退的な漸化式に変形すれば次式となる。

$$G_k = \{ E + ({}^t \Phi \cdot G_{k+1} + Q) \cdot D \cdot R^{-1} \cdot {}^t D \}^{-1} \cdot ({}^t \Phi \cdot G_{k+1} + Q) \cdot \Phi \quad (12)$$

ここに E は単位マトリクスを表す。この漸化式の出発点となるのは (6) 式の終端条件である。(6) 式に (8) 式を代入し変形する。

$$G_m \cdot x_{m-1}^* = F \cdot x_m^* = F \cdot (\Phi - D \cdot R^{-1} \cdot D) \cdot G_m \cdot x_{m-1}^*$$

$$G_m = F \cdot (\Phi - D \cdot R^{-1} \cdot D \cdot G_m)$$

$$G_m = (E + F \cdot D \cdot R^{-1} \cdot D)^{-1} \cdot F \cdot \Phi \quad (13)$$

この G_m から始めて、(12) 式で $k = m - 1, m - 2, \dots, 2, 1$ とすることによって G_{m-1}, \dots, G_2, G_1 が計算される。このとき (10) 式からわかるように x_0 から $x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*$ が定まり、(9) 式から最適入力の時系列 $u_0^*, u_1^*, \dots, u_{m-1}^*$ も求まる。

$m \rightarrow +\infty$ なる無限時間の最適レギュレータ問題は以上の有限時間の究極の場合として解ける。まず $F = 0$ と考えられるが、これを (13) 式に代入すれば $G_m = 0$ となり、(12) 式によって順次 G_{m-1}, \dots, G_2, G_1 を求め、さらに $G_0, G_{-1}, G_{-2}, \dots$ と計算していつて G_{k+1} と G_k がほぼ等しくなったところで G の解とする。この場合 G は一定の定数マトリクスとして制御に用いる。

3 適用性の一般化の考察

前節では基本的な問題の解法を述べた。一般的に問題に適用するためには考慮しておかなければならないことがある。(2)、(3) 式の定式化では制御対象への入力量は全て制御操作量であると仮定している。ところが現実には外気温や日射量のように入力量であっても操作量でないものが存在する。すなわち外乱がある。さらに状態の制御目標値は必ずしも 0 ではない。こうした一般的な問題でも拡大系^[3] というものを導入すれば扱えるようである。しかし本報の範囲では数値実験の単純化のために基本問題にとどめる。

4 数値実験

基本理論が実際に妥当な動作を示すかどうかを簡単な数値実験で確かめた。壁体内の初期温度分布を与え、両側の空気温度を操作量として、壁体内の温度分布を 0 にもっていく。厚み 0.4m のコンクリート壁を 8 等分し、各々の中心に 1 から 8 の節点を設け、9 と 10 の節点は各々両側の 1 と 8 の節点につながる空気温度として熱回路網をつかった。また表面の対流熱伝達率は各々 8.0 と 20.0 kcal/m² · h · deg とした。初期温度分布は節点 1 から 8 まで各々 0, 40, 50, 10, -10, -50, -40, 0 °C とした。Δt = 0.01h、m = 200 とした。その他の設定値は図中に示す。図 2 は操作量である両側の空気温度変化を表す。図 3 は、空気温度が常に 0 °C で最適制御無しの場合と、当最適制御ありの場合を、いくつかの節点について比較した温度変化を示す。限られた時間で全部の節点を 0 °C に近づけるため、伝熱系の性質

を巧みに利用した操作量の変化が得られているのが判る。その他、図には示していないが、 F 、 Q と R の大小関係による結果の違いも妥当な傾向を示した。

5 まとめ

状態空間法による最適制御理論を応用していくうえで、本熱回路網モデルや時間積分法は有効である。また最適レギュレータ問題の明快な 1 つの解法を数値実験で検証した。今後はこの理論の適用性を広げ、より現実的な場合の数値実験も行っていきたい。

(参考文献) [1] 奥山博康: "建築物の熱回路網モデルに関する理論的研究," 早稲田大学 建築環境工学 学位論文, 1987 年 12 月 (希望する方には差し上げます) [2] D.H.Owens, "Multivariable and Optimal Systems," Academic Press Inc.(London) Ltd. 1981, ISBN 0-12-531720-4 [3] 木村, 前田, 井上, 美坂, 高橋: "PC-9801 制御系設計プログラミング," 日刊工業新聞社, 1987 年 4 版

*清水建設(株) 技術研究所・研究員・工博

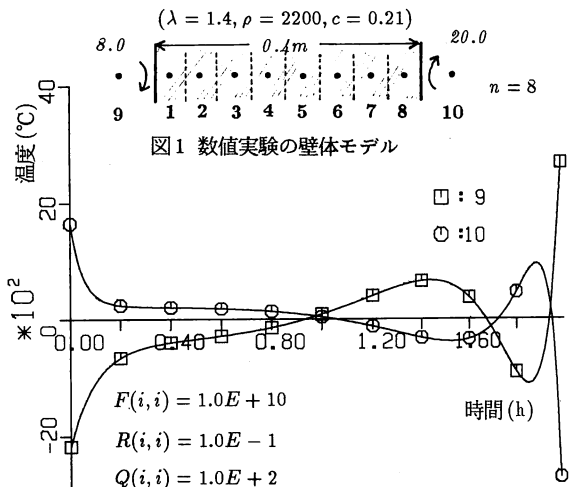


図2 操作量の空気温度変化

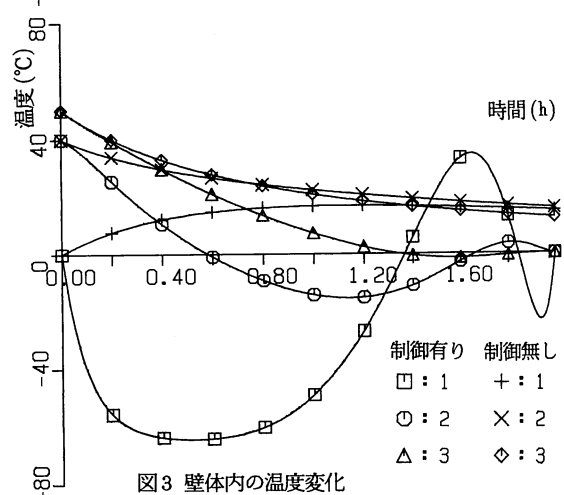


図3 壁体内の温度変化