

熱交換器の管内表面における指数関数の相当熱伝達係数

正会員 奥山 博康

熱回路網 管内表面熱伝達対流比 一般化熱コンダクタンス
熱交換器 指数関数出口温度 管内表面相当熱伝達係数

1. はじめに

従来の熱交換器の伝熱計算モデルでは、出入口の温度の対数平均温度差^[1]と熱通過率と伝熱面積による交換熱流の関係式を用いることが多い。しかし床暖房の温水管や熱回収換気装置あるいはクールチューブ等の熱交換器と建物を一体的な熱回路網モデル^[2]にする場合は、出入口温度は線形連立方程式の未知数とすることになる。従来は管の流れ方向の流体温度変化を多分割のモデルに近似して出口温度を解いてきた。一方、流れ方向の温度変化の常微分方程式を解けば、分割しないモデルでも比較的正確な出口温度が得られる。本論ではこの解析解を利用し、熱交換器を含む熱回路網モデルを、より少ない節点数ながらも、より精度の高いものにできる、管内表面における指数関数の相当熱伝達係数を導入する。

2. 指数関数の相当熱伝達係数の導出

流管の断面周長は p [m]で、長さは L [m]とする。内表面の面積は $p \cdot L = S$ [m²]とする。熱伝達率は α [W/m²K]とする。管内の流体の比熱を c [J/kg·K]、密度を ρ [kg/m³]、体積流量を q [m³/s]とし、温度を θ [°C]とする。管内の表面温度は θ_s [°C]とする。流れ方向の微小長さを dl とし、温度上昇を $d\theta$ とすれば、次の熱収支式(1)が記述でき、さらに常微分方程式(2)が記述できる。

$$c\rho q \cdot \theta - c\rho q(\theta + d\theta) + p\alpha(\theta_s - \theta)dl = 0 \quad (1)$$

$$c\rho q \frac{d\theta}{dl} = \alpha p(\theta_s - \theta) \quad (2)$$

この解はよく知られており、入口温度を θ_i で表せば、出口温度 θ_e は次式(3)で記述される。ここで $\alpha S / c\rho q$ を管内表面熱伝達対流比と呼ぶことにする。

$$\theta_e = (\theta_i - \theta_s) \exp\left(-\frac{\alpha S}{c\rho q}\right) + \theta_s \quad (3)$$

冷暖房機器を含む建物の熱回路網モデルにおいて、熱交換器周りの部分には、入口温度の節点と管内表面温度の節点があるから、これらと接続する出口温度 θ_e の節点を設けることができる。従来は管内流れ方向の流体を幾つかに分割して近似的な出口温度を求めていた。しかし出口温度の解析解(3)式を変形して熱収支式にすることができれば、その式の温度差に係る係数が、管内表面相当熱伝達係数 $c_{e,s}$ となる。まず(3)式を観察し、 θ_e の係数1を次式と見なす。

$$1 = \exp\left(-\frac{\alpha S}{c\rho q}\right) + \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha S}{c\rho q}\right)\right] \quad (4)$$

すると(3)式は、出口温度 θ_e との温度差による次の(5)式に書き改められる。

$$\left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha S}{c\rho q}\right)\right](\theta_s - \theta_e) + \exp\left(-\frac{\alpha S}{c\rho q}\right)(\theta_i - \theta_e) = 0 \quad (5)$$

次に θ_e の節点への移流の一般化熱コンダクタンス^[2]を $c\rho q$ として、熱収支式の物理単位にするために、両辺に $c\rho q / \exp(-\alpha S / c\rho q)$ を乗じて、次の熱収支式(6)を得る。

$$c\rho q \left[\exp^{-1}\left(-\frac{\alpha S}{c\rho q}\right) - 1 \right] (\theta_s - \theta_e) + c\rho q(\theta_i - \theta_e) = 0 \quad (6)$$

式(6)の温度差($\theta_s - \theta_e$)の係数を整理して、管内表面の相当熱伝達係数(一般化熱コンダクタンス) $c_{e,s}$ は次式で定義される。なお熱回路網の添字規約^[2]によれば $c_{e,s} = c_{s,e}$ と対称性を持つ。

$$c_{e,s} = c\rho q \left[\exp\left(\frac{\alpha S}{c\rho q}\right) - 1 \right] \quad (7)$$

一方、出口からの流出空気を受ける節点を k として、 $c_{k,e} = c_{e,i} = c\rho q$ 、 $c_{e,k} = c_{i,e} = 0$ と移流については非対称性を持つ。

3. 流体温度の多分割漸化式モデル

流れ方向に n_d 分割し、 $j+1$ 番のセグメントの熱流収支式(8)を変形し、漸化式(9)が得られる。

$$c\rho q \cdot \theta_j - c\rho q \cdot \theta_{j+1} + \frac{\alpha S}{n_d}(\theta_s - \theta_{j+1}) = 0 \quad (8)$$

$$\theta_{j+1} = \left(\frac{c\rho q}{c\rho q + \frac{\alpha S}{n_d}} \right) \theta_j + \left(\frac{\frac{\alpha S}{n_d}}{c\rho q + \frac{\alpha S}{n_d}} \right) \theta_s, \quad (j=1, 2, \dots, n_d) \quad (9)$$

この(9)式の右辺第1項と第2項の括弧の中を係数 u と w と定義して次の式が書ける。

$$\theta_{j+1} = u \cdot \theta_j + w \quad (10)$$

この種の漸化式の一般項を表す解法も知られている。分割数 n_d を増やせば一定値に近づくので、これを γ とおけば $\gamma = u \cdot \gamma + w$ で表される。この γ について解けば、 $\gamma = w / (1 - u) = \theta_s$ となる。つまり γ は内表面と空気の熱伝達が無限

に大きくなった時の究極温度 θ_s に等しい。そこで(10)式から $\theta_s = u \cdot \theta_j + w$ を辺々引けば、次の(11)式が記述できる。

$$\theta_{j+1} - \theta_s = u \cdot (\theta_j - \theta_s) \quad (11)$$

これは数列 $(\theta_j - \theta_s)$ が公比 u の等比数列になることを表している。従って次式が記述できる。

$$\begin{aligned} \theta_j - \theta_s &= u \cdot (\theta_{j-1} - \theta_s) \\ &= u^2 \cdot (\theta_{j-2} - \theta_s) = u^3 \cdot (\theta_{j-3} - \theta_s) = \dots \\ &= u^j \cdot (\theta_i - \theta_s) \end{aligned} \quad (12)$$

この初項は $(\theta_i - \theta_s)$ であるから、一般に n_d 分割の場合には出口温度 θ_{n_d} は次式で計算される。

$$\theta_{n_d} = (\theta_i - \theta_s) \cdot u^{n_d} + \theta_s \quad (13)$$

これは、オイラーの指数関数の定義式により、 n_d が無限に大きくなれば、(3)式の出口温度の解析解に等しくなることが分かる。

4. 出口温度の解析解と分割離散化の近似解との比較

三種の熱交換装置の出口温度について、流れ方向を分割して求めた(13)式による近似解と、(3)式による解析解の違いを比較計算してみた。これらは、床暖房の温水管、地中熱利用のクールチューブ、そして蓄放熱利用の熱回収換気装置である。

4.1 温水の床暖房

既製品の資料をもとに試算を行った。床面が縦 2.4m × 横 3.3m で温水管は並列に 4 本が敷設される。4 本合計の流量は 1.5L/min、外径と内径は 7.2mm と 5mm、長さは 26m である。内表面積 S は 1.634m² で内表面伝達率 α は 742W/m²K とした。そして入口温度は 50℃で管内表面温度は 20℃とすると、出口温度の解析解は 20.0℃となる。

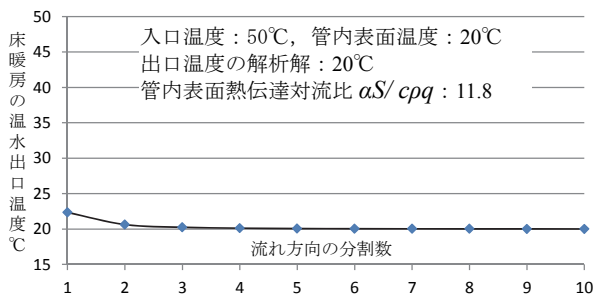


図1 温水床暖房の分割モデルの出口温度

温水管の流れ方向が、1 分割（無分割）から 10 分割までの分割モデルの出口温度を図 1 に示す。1~2 分割以上のモデルであれば、実用上は間に合いそうである。

4.2 熱回収換気装置

外形の直径が約 15cm で長さが約 20cm のセラミックの円筒で、蜂の巣状に空気流通経路を持つ蓄放熱方式の熱回収換気装置の幾何的な仕様に基いて試算した。これは 1 室あたり 2 個取り付けられ、其々が給・排気を約 1

分おきに交替する。熱伝達の内表面積は約 1.65m² あり、対流熱伝達は 22W/m²K とした。風量は 40m³/h である。外気温度 0℃が入口温度で内表面温度が 11℃とすると解析解は 10.267℃となる。分割モデルの試算結果を図 2 に示す。床暖房温水管の内表面伝達対流比は 11.8 に対し、これは 2.71 と小さく、5~6 分割以上は必要と考えられる。

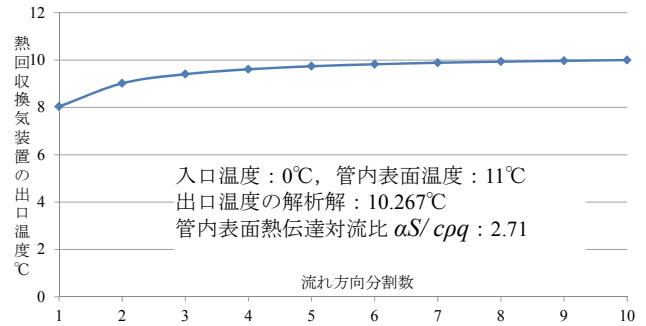


図2 熱回収換気装置の分割モデルの出口温度

4.3 地中熱利用のクールチューブ

小部屋の換気の前冷用のクールチューブを想定する。チューブの内径は 0.2m で長さは 6m とする。内表面の対流熱伝達率は 10W/m²K とした。そして入口温度になる外気温度が 30℃で、内表面温度は 20℃と仮定すると、解析解は 20.6℃となる。一方、流れ方向分割モデルの出口温度は図 3 に示す。管内表面熱伝達対流比は 2.81 で前例より少し大きく、4~5 分割以上あれば間に合いそうである。

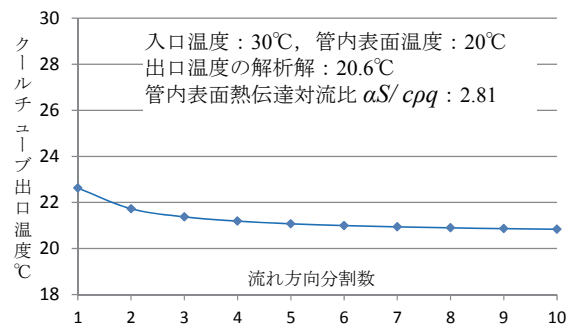


図3 クールチューブの分割モデルの出口温度

5. まとめ

管内表面熱伝達対流比が大きければ、少ない分割数の離散化モデルでも、実用上は十分な出口温度が得られるが、多くの場合は数分割で間に合う。さらに本論の指数関数の相当熱伝達係数を用いることで、流体の流れ方向が 1 節点でも精度の高い出口温度が得られ、比較的簡単に実用的な熱回路網モデルにすることができる。

【参考文献】

- [1] 例えば、内田秀雄 編, 大学演習 伝熱工学, 裳華房, 昭和 48 年 3 月, 第 3 版, p9, pp260-264
- [2] 奥山博康, 建築物の熱回路網モデルに関する理論的研究, 早稲田大学, 博士号学位請求論文, 1987 年 12 月