

## 多数室建物の伝熱・換気のシステム同定理論と不確かさ分析法

正会員 ○ 奥山 博康\*

熱回路網	状態空間方程式	システム同定
最適励振	ローパスフィルタ	前提の不適合率

## 1. はじめに

多数室建物での熱損失係数, 日射取得係数と有効熱容量の現場測定法が必要とされている. また正しい測定評価のためには同時に多数室換気測定を行うことが望ましい. 1980年代初期の筆者の理論[1]に対し, ここ数年は風量収支等の拘束条件の組み込み定式化法, 不確かさ分析法, 信頼性評価指標, さらに最適励振と測定値の濾波法等の再考と改良[2]を行っているので概要を述べる.

## 2. パラメタの観測方程式

拡散系の空間的離散化モデルの骨組みは一般に(1)式の完全連結システムの節点方程式で記述できる. これにより状態空間方程式とも呼ぶ連立常微分方程式(2)が構成される. ここに  $x_j$ ,  $m_{ij}$ ,  $c_{ij}$ ,  $r_{ij}$  は各々, 節点  $j$  の温度等の拡散ポテンシャル, 節点  $i$  に関する一般化容量, 節点  $j$  から節点  $i$  への一般化コンダクタンス, 熱流等の発生源  $j$  から節点  $i$  への自由入力係数である. また  $n$  は未知数扱いの,  $no$  は既知数扱いの節点数,  $ng$  は発生源の総数である.

$$\sum_{j=1}^n m_{i,j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^{n+no} c_{i,j} (x_j - x_i) + \sum_{j=1}^{ng} r_{i,j} g_j \quad (1)$$

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{C}_0\mathbf{x}_0 + \mathbf{R}\mathbf{g} \quad (2)$$

この(2)式を次のパラメタの観測方程式(3)に変形する. 一つの節点まわりには既知パラメタが少なくとも一個あるとし, 変数  $x_j$  か  $g_j$  との積によって作られる項は左辺の  $\mathbf{y}$  の中に移項する. また被同定パラメタ  $m_{ij}$ ,  $c_{ij}$ ,  $r_{ij}$  によるベクトルを  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{r}$  とし, これに係るマトリックスは  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{G}$  と定める. これらをまとめて次数  $na$  の  $\mathbf{a}$  と  $n \times na$  の  $\mathbf{Z}$  を定める.

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}(\dot{\mathbf{x}})\mathbf{m} + \mathbf{X}(x_i)\mathbf{c} + \mathbf{G}(g_i)\mathbf{r} = [\mathbf{D}, \mathbf{X}, \mathbf{G}] \begin{bmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} = \mathbf{Z}\mathbf{a} \quad (3)$$

測定時間間隔  $\Delta t$ , 総測定時点数は  $nt$  で測定期間は  $T$  とする. ( $k-1$ ) $\Delta t$  から  $k\Delta t$  までの線形補間積分により次式の  $\mathbf{y}_k$ ,  $\mathbf{Z}_k$  を定義し(6)をパラメタの観測方程式とする.

$$\mathbf{y}_k = \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \mathbf{y} dt \quad (4) \quad \mathbf{Z}_k = \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \mathbf{Z} dt \quad (5) \quad \mathbf{y}_k = \mathbf{Z}_k \mathbf{a} \quad (6)$$

## 3. 最小二乗法の二重適用による解法

(6)式の左辺から右辺を引いた方程式誤差を  ${}^n\mathbf{e}_k$  とし  ${}^n\mathbf{e}_k \cdot {}^n\mathbf{e}_k$  の時間総和を  $\mathbf{a}$  により微分し最小化条件を記述する. これが拘束条件と複合して持つ誤差を  $\mathbf{e}_a$  とし(7)式を記述する. またパラメタ間には, 流量収支, 伝導の対称性, 伝導率等の上位のパラメタへ回帰する  $n_s$  本の拘束条件式が存在するので  $\Delta t \mathbf{S}\mathbf{a} = \Delta t \mathbf{d}$  なる拘束条件式が記述できる. これも最小二乗条件式を取り複合条件式で持つ誤差を  $\mathbf{e}_s$  とすれば(8)式となる.

$$\mathbf{e}_a = \sum_{k=1}^{nt} {}^t\mathbf{Z}_k \mathbf{y}_k - \sum_{k=1}^{nt} {}^t\mathbf{Z}_k \mathbf{Z}_k \mathbf{a} \quad (7) \quad \mathbf{e}_s = \Delta t^2 \cdot {}^t\mathbf{S}\mathbf{d} - \Delta t^2 \cdot {}^t\mathbf{S}\mathbf{S}\mathbf{a} \quad (8)$$

(7)式と(8)式を束ねて次式の複合回帰方程式誤差  $\mathbf{e}$  を定義する. 次式で簡単化のためにベクトル  $\mathbf{b}$  とマトリックス  $\mathbf{F}$  を定める.

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_a \\ \mathbf{e}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{nt} {}^t\mathbf{Z}_k \mathbf{y}_k \\ \Delta t^2 \cdot {}^t\mathbf{S}\mathbf{d} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{nt} {}^t\mathbf{Z}_k \mathbf{Z}_k \\ \Delta t^2 \cdot {}^t\mathbf{S}\mathbf{S} \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{F}\mathbf{a} \quad (9)$$

不偏推定をするための重みマトリックス  $\mathbf{W}_a$  と  $\mathbf{W}_s$  を導入する.  $\mathbf{W}_a$  は  $\sum {}^t\mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{Z}_k$  ( $na \times na$ ) の各  $i$  行の最大絶対値を探して逆数の二乗を  $\mathbf{W}_a$  の第  $i$  番対角要素に代入するが, ある行が全て 0 の場合は 1 を代入する. 故に  $\mathbf{W}_a$  の次数は ( $na \times na$ ) となる. 同様に  $\Delta t^2 \cdot \mathbf{S}\mathbf{S}$  について  $\mathbf{W}_s$  ( $na \times na$ ) を作る. これらの  $\mathbf{W}_a$  と  $\mathbf{W}_s$  を対角に持つ重みマトリックス  $\mathbf{W}$  により  ${}^t\mathbf{e}\mathbf{W}\mathbf{e}$  の評価関数を作る. 二重の最小二乗による  $\mathbf{a}$  の推定値が(10)式となる. また推定パラメタの不確かさ分散共分散マトリックス  $\mathbf{\Lambda}_a$  は, 方程式誤差の期待値マトリックスからの伝搬として計算すれば(11)式が得られる.

$$\hat{\mathbf{a}} = ({}^t\mathbf{FWF})^{-1} \cdot ({}^t\mathbf{FWb}) \quad (10)$$

$$\mathbf{\Lambda}_a = ({}^t\mathbf{FWF})^{-1} ({}^t\mathbf{FWE}(\mathbf{e} \cdot {}^t\mathbf{e})\mathbf{WF}) \left\{ ({}^t\mathbf{FWF})^{-1} \right\} \quad (11)$$

右辺の中にある  $E(\mathbf{e} \cdot {}^t\mathbf{e})$  の方程式誤差期待値マトリックスは, 共分散を 0 とみなせば次式となる.

$$E(\mathbf{e} \cdot {}^t\mathbf{e}) = \begin{bmatrix} E(\mathbf{e}_a \cdot {}^t\mathbf{e}_a) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E(\mathbf{e}_s \cdot {}^t\mathbf{e}_s) \end{bmatrix} \quad (12)$$

右辺の誤差の期待値  $E(\ )$  は二通り定義でき, 以降で方程式残差からのものには添え字  $r$  (residue) を, 測定不確かさからのものには  $m$  (measurement) を付けて表わすことにする.

## 4. 方程式残差からの不確かさ伝播と決定係数

(6)式の残差は次の(13)式で計算され, その期待値マトリックスは(14)式で計算される.

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{Z}_k \cdot \hat{\mathbf{a}} \quad (13)$$

$$E(\mathbf{v}_k \cdot {}^t\mathbf{v}_k) = (1 / (nt - na)) \text{diag} \sum_{k=1}^{nt} \mathbf{v}_k \cdot {}^t\mathbf{v}_k \quad (14)$$

これにより  $\mathbf{e}_a$  の期待値マトリックスは(15)式で計算され, これを適用した場合の  $\mathbf{\Lambda}_a$  を  ${}^r\mathbf{\Lambda}_a$  とする. 次に決定係数の算出に必要な残差二乗和は(16)式で計算される.

$$E_r(\mathbf{e}_a \cdot {}^t\mathbf{e}_a) = \sum_{k=1}^{nt} {}^t\mathbf{Z}_k \cdot E(\mathbf{v}_k \cdot {}^t\mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{Z}_k \quad (15)$$

$$s(\hat{\mathbf{a}}) = \sum_{k=1}^{nt} {}^t\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^{nt} ({}^t\mathbf{y}_k - \mathbf{Z}_k \cdot \hat{\mathbf{a}}) \cdot ({}^t\mathbf{y}_k - \mathbf{Z}_k \cdot \hat{\mathbf{a}}) \quad (16)$$

総変動  $s_y$  は次の(17)式で計算される. さらにこれらの残差二乗和と総変動から決定係数は次の(18)式で計算される.

$$s_y = \sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y}_k) \cdot (y_k - \bar{y}_k) = \sum_{k=1}^n y_k \cdot y_k - \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n y_k \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^n y_k \right) \quad (17)$$

$$COD = 1 - \frac{s(\hat{\mathbf{a}})}{s_y} \quad (18)$$

拘束条件式の  $E_r(\mathbf{e}_s \cdot {}^t \mathbf{e}_s)$  ( $na \times na$ ) は次式で計算する。

$$E_r(\mathbf{e}_s \cdot {}^t \mathbf{e}_s) = \Delta t^4 \left( {}^t \mathbf{S} \mathbf{d} - {}^t \mathbf{S} \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{a}} \right) \cdot \left( {}^t \mathbf{S} \mathbf{d} - {}^t \mathbf{S} \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{a}} \right) \quad (19)$$

以上の  $E_r(\mathbf{e}_a \cdot {}^t \mathbf{e}_a)$  と  $E_r(\mathbf{e}_s \cdot {}^t \mathbf{e}_s)$  を(12)式に代入し(11)式により  ${}_r \Lambda_a$  を計算する。この対角要素から方程式残差起源の同定パラメータ不確かさ分散が得られる。

## 5. 測定不確かさからの伝播

ガス濃度やガス発生量の測定不確かさ分散から推定パラメータへの不確かさ伝播を記述する。いま  $x_i$  と  $g_i$  の測定値が瞬時的な観測不確かさ分散  $\sigma_x^2$  と  $\sigma_g^2$  を持つとする。これらの  $x_i$  と  $g_i$  を  $\Delta t$  の区間で積分した値と増分を時系列方向に総和して用いるが  $x_i$  と  $g_i$  に関する  $\Delta t$  積分の不確かさ分散  ${}_s \sigma_x^2$ ,  ${}_s \sigma_g^2$  や、増分計算結果の不確かさ分散  ${}_b \sigma_x^2$  は、不確かさ伝播則により次の様に計算される。

$${}_b \sigma_{x_i}^2 = 2 \cdot \sigma_{x_i}^2 \quad (20)$$

$${}_s \sigma_{x_i}^2 = (1/2) \cdot \Delta t^2 \cdot \sigma_{x_i}^2 \quad (21) \quad {}_s \sigma_{g_i}^2 = (1/2) \cdot \Delta t^2 \cdot \sigma_{g_i}^2 \quad (22)$$

ここで測定データのベクトルと、これらが持つ不確かさ分散ベクトルを次のように定義する。

$${}_b \mathbf{x}_k = ({}_b x_{1k}, \dots, {}_b x_{nk}) \quad (23) \quad {}_b \mathbf{g}_k = ({}_b g_{1k}, \dots, {}_b g_{nk}) \quad (24)$$

$${}_s \mathbf{x}_k = ({}_s x_{1k}, \dots, {}_s x_{nk}, \dots, {}_s x_{n+no,k}) \quad (25)$$

$${}_s \mathbf{g}_k = ({}_s g_{1k}, \dots, {}_s g_{nk}, \dots, {}_s g_{n+no,k}) \quad (26)$$

$${}_s \mathbf{g}_k = ({}_s g_{1k}, \dots, {}_s g_{ngk}) \quad (27) \quad {}_s \sigma_{\mathbf{g}} = ({}_s \sigma_{g1}, \dots, {}_s \sigma_{gng}) \quad (28)$$

${}_b \mathbf{x}_k$ ,  ${}_s \mathbf{x}_k$ ,  ${}_s \mathbf{g}_k$  は各々真値に不確かさ  ${}_b \mathbf{s}_{xk}$ ,  ${}_s \mathbf{s}_{xk}$ ,  ${}_s \mathbf{s}_{gk}$  が加わったものと見なす。パラメータの推定不確かさ原因は  $x_j$  と  $g_j$  の測定不確かさだけとすれば、真値の  $x_j$  と  $g_j$  は状態方程式誤差を 0 にする。従って(2)式等から次式が記述できる。

$$\begin{aligned} {}_n \mathbf{e}_k &= -\mathbf{M} \cdot {}_b \mathbf{x}_k + [\mathbf{C} \quad \mathbf{C}_0] \cdot {}_s \mathbf{x}_k + \mathbf{R} \cdot {}_s \mathbf{g}_k \\ &= -\mathbf{M} \cdot {}_b \mathbf{s}_{xk} + [\mathbf{C} \quad \mathbf{C}_0] \cdot {}_s \mathbf{s}_{xk} + \mathbf{R} \cdot {}_s \mathbf{s}_{gk} \quad (29) \end{aligned}$$

状態方程式誤差が  $x_j$  と  $g_j$  の測定不確かさだけに起因するとすれば、方程式誤差  ${}_n \mathbf{e}_k$  の期待値マトリックスは次式で計算される。ここに不確かさ  ${}_b \mathbf{s}_{xk}$ ,  ${}_s \mathbf{s}_{xk}$ ,  ${}_s \mathbf{s}_{gk}$  の間での共分散は 0 であることと、これら 3 つのベクトル内の要素間の共分散も 0 である性質を用いた。

$$\begin{aligned} E({}_n \mathbf{e}_k \cdot {}^t \mathbf{e}_k) &= \text{diag}(\mathbf{M} \cdot E({}_b \mathbf{s}_{xk} \cdot {}^t \mathbf{s}_{xk}) \cdot {}^t \mathbf{M} \\ &\quad + [\mathbf{C}, \mathbf{C}_0] \cdot E({}_s \mathbf{s}_{xk} \cdot {}^t \mathbf{s}_{xk}) \cdot [\mathbf{C}, \mathbf{C}_0]^t + \mathbf{R} \cdot E({}_s \mathbf{s}_{gk} \cdot {}^t \mathbf{s}_{gk}) \cdot {}^t \mathbf{R}) \\ &= \text{diag}(\mathbf{M} \cdot \text{diag}({}_b \sigma_x \cdot {}^t \sigma_x) \cdot {}^t \mathbf{M} \\ &\quad + [\mathbf{C}, \mathbf{C}_0] \cdot \text{diag}({}_s \sigma_x \cdot {}^t \sigma_x) \cdot [\mathbf{C}, \mathbf{C}_0]^t + \mathbf{R} \cdot \text{diag}({}_s \sigma_g \cdot {}^t \sigma_g) \cdot {}^t \mathbf{R}) \quad (30) \end{aligned}$$

これにより次式が計算される。

$$E_m(\mathbf{e}_a \cdot {}^t \mathbf{e}_a) = \sum_{k=1}^n {}^t \mathbf{Z}_k \cdot E({}_n \mathbf{e}_k \cdot {}^t \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{Z}_k \quad (31)$$

また拘束条件式誤差の期待値マトリックスは方程式誤差の原因が測定不確かさだけならば 0 であるので次式が記述できる。

$$E_m(\mathbf{e}_s \cdot {}^t \mathbf{e}_s) = E\left\{(\mathbf{d} - \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{a}}) \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{a}})^t\right\} = \mathbf{0} \quad (32)$$

これらの  $E_m(\mathbf{e}_a \cdot {}^t \mathbf{e}_a)$  と  $E_m(\mathbf{e}_s \cdot {}^t \mathbf{e}_s)$  を(12)式に代入し(11)式により  ${}_m \Lambda_a$  を計算する。この対角要素から測定不確かさ起源の同定パラメータ不確かさ分散が得られる。

## 6. システム同定モデル前提の不適合率

線形性、時不変性、空間離散化近似等の同定モデルの前提が、どの程度実現象で食い違っているかの判断を、この  ${}_m \Lambda_a$  に対して  ${}_r \Lambda_a$  の大きさを比較することによって行うことができる。ここで  ${}_m \Lambda_a$  の  $j$  番目の対角要素を  ${}_m \sigma_{\lambda_{jj}}^2$  で、 ${}_r \Lambda_a$  の  $j$  番目の対角要素を  ${}_r \sigma_{\lambda_{jj}}^2$  で表す。これらの対角要素の平方根をとって次式のシステム同定モデル前提の不適合率  $\beta$  を定義する。

$$\beta_j = \frac{{}_r \sigma_{\lambda_{jj}}}{{}_m \sigma_{\lambda_{jj}}} \quad (33)$$

この  $\beta$  が 1 よりもかなり大きい場合には測定の条件やモデルに不適切さがあると考えられるので修正する必要がある。

## 7. システム同定の最適励振と測定データの最適前処理

多数室換気測定の場合には各室に攪拌ファンを置くのでモデルと実現象の差異は小さい。しかし伝熱系では室温の節点のみで躯体の節点は省かざるを得ず粗いモデルとなり構造的な差異が大きい。この粗いモデルでも電熱ヒータ加熱を矩形波ではなく 72 時間程の低周波数の正弦波で行えば比較的良好な同定結果が得られる。この時に室温の節点の有効熱容量には室空気だけでなく周囲壁体等のものが含まれる。矩形波はフーリエ級数展開した際に高周波成分を持ちこれがシステム同定に悪影響を及ぼすと考えられる。

一方、測定不確かさはギザギザの様相を示し、やはり高周波成分であるが、移動平均のスムージングを施せば改善され、もし 1 分間隔の測定値であれば、10 から 60 分の期間で効果がある。

この移動平均はローパスフィルタの効果も持つ。全ての測定値をこのフィルタにかけることで粗いモデルでも良い結果が得られる様である。ただしローパスフィルタ機能としての移動平均期間は 8 時間程の長いものとなる。最適の期間は有効熱容量と決定係数が比較的に大きくなることで探索できる。

ここにシステムパラメータを求めるために移動平均をかけた測定値を用いても、不確かさと信頼性の評価のためには元の測定値を用いなければならない。事例検証は[2]に示す。

## 8. まとめ

最小二乗法を二重に適用する複合回帰式に改良した。拘束条件の拡張性が広がった。重みマトリックスの導入で不偏性と安定性と精度が向上した。新たな信頼性評価指標  $\beta$  も定義した。同定パラメータの不確かさ標準偏差  $\sigma$  も適切に評価できる。さらに励振には低周波数の正弦波を用い、測定データには移動平均のローパスフィルタ処理をすれば良い同定結果が得られることも分かった。

### 【参考文献】

- [1] 奥山博康, 一般拡散システムの回路網による状態方程式とそのシステムパラメータの同定理論, 日本建築学会論文報告集, Vol. 344, 1984年10月, pp103-115
- [2] Okuyama H, et al. System parameter identification theory and uncertainty analysis methods for multi-zone building heat transfer and infiltration, Building and Environment, 54, published online: 2 Mar. 2012, pp39-52,